LA EPISTEMOLOGÍA DE LA MATEMÁTICA EN SU DIDÁCTICA

AUTORES: Neel Báez Ureña[1]

Ramón Blanco Sánchez[2]

DIRECCIÓN PARA CORRESPONENCIA: neelbaez02@gmail.com

Fecha de recepción: 15-08-2020

Fecha de aceptación: 21-10-2020

RESUMEN

En este artículo se analiza y explica la necesidad de que los docentes tengan en cuenta las características epistemológicas de la Matemática para dirigir el proceso enseñanza aprendizaje de esta disciplina con fundamentos científicos. Se especifican dichas características las cuales se derivan de la ontología de esta ciencia y como se reflejan en la didáctica de la Matemática, desde donde se argumenta la necesidad de lograr que los docentes incorporen dichas características en la dirección del proceso enseñanza aprendizaje. Se describen las orientaciones dadas al respecto a 12 docentes de Matemática de la universidad APEC y se recogen las opiniones de los docentes que recibieron dichas orientaciones.

PALABRAS KLAVE: epistemología; didáctica; Matemática.

MATHEMATICS' EPISTEMOLOGY IN THEIR DIDACTICS

ABSTRACT

In this paper the necessity that the docents keep in mind the Mathematics' epistemologyc characteristics is analyzed and explained to direct the teaching learning process of this discipline using scientific foundations. The afford mentioned characteristics are specified, the ones that comes from this science's ontology and how they are reflected in the Mathematics' didactic, from here the necessity to achieve that the docents incorporate this characteristic in the direction of the process teaching learning are enlightened. The orientations given to twelve docents from APEC University about this theme are described and the opinions from the docents that received the speaking about orientation are gathered.

KEYWORDS: Mathematics; epistemology; didactic

INTRODUCCIÓN

A nivel internacional, en la actualidad se trabaja con los docentes en ejercicio con el fin de que mejoren su actividad docente tanto en lo que respecta a su formación Matemática como a sus conocimientos didácticos, para lo que se implementan diferentes actividades de posgrado, las

[1] Doctor en Ciencias Pedagógicas, coordinador de la cátedra de Álgebra Superior de la Escuela de Matemática de la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD). Colabora con el Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, en la Universidad Acción Pro Educación y Cultura (APEC). República Dominicana.

[2] Doctor en Ciencias Pedagógicas, 45 años de experiencia en el proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática, Profesor Titular, colaborador del Centro de Estudios Enrique José Varona de la Universidad de Camagüey. Cuba. E-mail: ramon.blanco@reduc.edu.cu

© Centro de Investigación y Desarrollo. Universidad Regional Autónoma de Los Andes - Extensión Santo Domingo. Ecuador.

cuales no siempre rinden los frutos esperados, lo que es motivado por una variedad considerable de factores, como interés, falta de tiempo, (muchos docentes tiene más de un trabajo) actividades que no reflejan los problemas que se le presentan a los docentes en el aula, cursos de didáctica general que los docentes no pueden llevar a sus aulas, entre otros; esta problemática conduce a que los docentes en muchas ocasiones realicen su actividad profesional tomando como referencias los profesores que en su vida de estudiantes consideraron más capaces.

Evidentemente los docentes que trabajen tomando como modelos profesores que tuvieron en su vida estudiantil, lo harán de manera empírica, pues es posible que el docente o los docentes tomados de ejemplos, sean verdaderamente modelos a seguir, pero indudablemente desconocen por qué dichos profesores, tomados como ejemplos, usaban este o aquel método o procedimiento para desarrollar una determinada actividad docente, o explicar un tema en particular, por lo que no pueden ajustar sus experiencias a situaciones que varían en cierta medida respecto a las que ellos vivieron.

De los aspectos señalados como causantes de que los docentes pierdan el interés por los cursos u otras actividades de posgrado que reciben, el más notorio es el referido a las actividades de posgrado impartidas por docentes que no tienen formación matemática, pues aunque lógicamente, siempre se requieren conocimientos de didáctica general, lo que más necesita el docente de Matemática es didáctica de la Matemática, pero basada en la Matemática misma, ya que la ciencia Matemática tiene su ontología y epistemología propia que la distinguen del resto de las ciencias y que definen su didáctica.

Por lo que el objetivo del presente trabajo es mostrar la necesidad de desarrollar una didáctica de la Matemática basada en la epistemología de esta disciplina. Es algo perfectamente entendible, que para explicar Matemática es necesario tener en cuenta cómo se produce y desarrolla el conocimiento en esta ciencia.

DESARROLLO

Características epistemológicas de la Matemática

Dado que la epistemología de una ciencia caracteriza la forma en que se produce y desarrolla el conocimiento, o sea se ocupa de estudiar la naturaleza, el origen y la validez del conocimiento sus principios, fundamentos, extensión y métodos, se hace necesario para explicar una ciencia tener conocimientos de su epistemología o al menos de los aspectos fundamentales que la caracterizan.

Un estudio sobre el tema nos conduce a asumir la caracterización de la epistemología de la Matemática explicada por Byas, R. y Blanco, R. (2017), cuya caracterización es la siguiente:

1. La apropiación del concepto implica su representación en diferentes registros semióticos.
2. Se aprende Matemática cuando se realizan las actividades a través de las cuales se desarrolla la misma.
3. Interrelación: actividad procesal entre sujetos – apropiación del concepto individual.
4. Carácter individual y sistémico del objeto matemático.
5. Carácter singular-general del modelo matemático.

El aspecto número 1 se deriva a su vez de un aspecto que caracteriza la ontología de la Matemática según los referidos autores, que es el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos, el hecho de que los objetos matemáticos no tengan vida física obliga a consideraciones específicas en la didáctica de la Matemática, ya que no hay objetos físicos que mostrar en lugar de los objetos matemáticos, Duval, R. (2006), lo cual lleva a que se acceda a los objetos matemáticos a través de sus representaciones semióticas, pero cada representación solo muestra algunas características del objeto, por lo que se hace necesario el uso de más de una representación semiótica para que el estudiante pueda interpretar el objeto, por lo que resulta claro que la apropiación conceptual depende del uso de diferentes representaciones del concepto; además está en concordancia con el mecanismo del pensamiento humano según la teoría de S. L. Vigotsy donde se plantea que el pensamiento humano se materializa en símbolos y que sobre esa materialización el pensamiento sigue su curso Vigotsky, L. (1981), entonces se concluye que la materialización semiótica de los objetos matemáticos es la base física para el desarrollo del pensamiento matemático, lo que determina la importancia de estas materializaciones en la didáctica de la Matemática. Este carácter no ostensivo de los objetos matemáticos está en estrecha correlación con las deficiencias de los estudiantes en el trabajo conceptual, en Yero, L. y otros (2018), se plantea que los estudiantes son incapaces de operar con conceptos.

El aspecto número 2 también es consecuencia de otro aspecto que caracteriza la ontología de la Matemática, esto es: la Matemática es medio y objeto en sí misma Byas, R. y Blanco, R. (2017). Lo cual pone de manifiesto que cada resultado matemático es obtenido solo con herramientas matemáticas, sin necesidad de acudir a herramientas fuera del campo de la Matemática, cosa que no sucede en ninguna otra ciencia; de aquí se deriva que para aprender Matemática hay que realizar las actividades a través de las cuales se desarrolla la misma, en otras palabras, no se puede decir que un alumno ha aprendido Matemática porque haga determinadas tareas de modo reproductivo y no usando conocimientos matemáticos o las tareas que se le asignen se limiten sólo a ejercicios de cálculo; por lo que esta característica epistemológica de la Matemática indica la necesidad de que los estudiantes, resuelvan diferentes tipos de tareas matemáticas como graficar, inducir, demostrar, resolver, etc.

El tercer aspecto, Interrelación: actividad procesal entre sujetos – apropiación del concepto individual, complementa los aspectos 1 y 2, porque tanto la representación del objeto en diferentes registros semióticos, como la realización de las actividades a través de las cuales se desarrolla la Matemática son actividades procesales entre sujetos, que conduce a la apropiación conceptual; la importancia de este aspecto se manifiesta al ser considerado en diferentes teorías sobre la enseñanza de la Matemática, aunque no lo expresen con las mismas palabras, como es en los trabajos de Vigotsky, que se manifiesta en el planteamiento que expresa que la apropiación conceptual transita de la interrelación inter-psíquica entre sujetos a la apropiación intra-psíquica individual Vigotsky, L. (1981). También se encuentra inmerso en la teoría APOE de E. Dbinsky, acción, proceso, objeto, esquema Dubinsky, E. (1991); además en la bibliografía especializada son abundantes los trabajos donde se estudia o investiga el tránsito del proceso al objeto, entre los que se destacan los trabajos de D Tall, quien incluso plantea que un proceso puede ser ejecutado a través de diferentes procedimientos Tall, D. (2007). Por lo que el docente de Matemática debe estar al tanto de este tránsito del proceso al objeto para dirigir la apropiación conceptual de sus estudiantes.

El docente de Matemática también debe distinguir el carácter individual del carácter sistémico del objeto matemático, pues no se debe tratar de la misma forma cuando se trabaja con el objeto

matemático en una forma que en otra; cuando el objeto es estudiado en sí mismo, esto es en su forma individual, la atención se debe enfocar a sus características intrínsecas y para que el objeto sea incorporado al esquema cognoscitivo del estudiante, es necesario destacar el lugar que ocupa en la estructura sistémica de la Matemática. Lo planteado se ilustra con el caso de la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, en primer lugar, el estudiante trabaja con la misma como un objeto específico, aprendiendo sus características intrínsecas, para posteriormente convertirla en una herramienta, muy útil, que le permite, entre otras muchas cosas, resolver ecuaciones tales como: $a(\cos(\theta))^2 + b\cos(\theta) + c = 0$ con un cambio de variable adecuado e incorporarla en el esquema de las ecuaciones polinómicas. Como se plantea en Sabonete, J. Gamboa, M. y Mestre, U. (2015), la sistematización de una habilidad, en general, no termina en una temática dada, sino al ser retomada en una temática posterior, donde el objeto de estudio se ha enriquecido al usarlo como herramienta.

Que el estudiante logre construir el modelo para la resolución de un problema es una meta importante en la enseñanza de la Matemática, pero no siempre alcanzada, por lo que el trabajo con diferentes modelos debe estar presente en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática. Pero se debe tener en cuenta que toda una variedad de problemas puede obedecer a un mismo tipo de modelo, como es el caso del modelo $ax^2 + bx + c = 0$, a través del cual se pueden resolver muchos problemas; esto es lo que se considera el carácter general del modelo matemático, pero independientemente de esta generalidad, cada modelo es singular para un problema específico. Cuando el modelo se usa en su carácter general, es usual que sus coeficientes estén representados paramétricamente y en su forma singular los coeficientes están dados numéricamente. Es necesario distinguir ambos caracteres del modelo para evitar el trabajo mecánico de los estudiantes, quienes en ocasiones tienden a identificar la vía de resolución de un problema por el tipo de modelo a través del cual se resuelve el mismo; El modelo en su forma general permite una solución generalizada de un problema, gracias al uso de los coeficientes expresados paramétricamente, mientras que el modelo en su forma singular permite la solución de un problema específico.

Didáctica y epistemología

Para lograr que los estudiantes se apropien de un concepto, como ya se explicó, se debe representar este en diferentes registros semióticos, lo cual el estudiante no hará si no es orientado a hacerlo por parte del docente; por ejemplo en el caso del concepto de derivada, la definición de derivada en un punto como: "La tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de la tangente geométrica a la curva en un punto" le dice muy poco a los estudiantes, además no refleja el hecho de que es un límite, por lo que resulta imprescindible la representación como un límite: $f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$, lo cual permite al estudiante la idea de la derivada como un cociente de incrementos cuando el incremento tiende a cero, idea que puede ir concretando con el apoyo gráfico representado como el límite de la secante cuando la secante tiende a la tangente geométrica, posteriormente las interpretaciones físicas ayudan a que los estudiantes logren comprender la derivada como el modelo matemático para interpretar todos los fenómenos físicos de variación instantánea. Evidentemente todos estos cabios de representación deben ser explicados, destacando que representan el mismo objeto matemático, pues se da el caso que los estudiantes ven diferentes representaciones semióticas de un mismo objeto, como representaciones de objetos relacionados pero diferentes. Es claro aquí que el docente debe saber

por qué necesita usar diferentes representaciones de un mismo objeto, pues de lo contrario puede considerarlo no importante para el aprendizaje de sus estudiantes.

Cuando el docente desconoce que el aprendizaje de la Matemática se produce cuando se ejecutan las actividades a través de las cuales se desarrolla esta ciencia, no logra la formación del pensamiento matemático en sus estudiantes, cuando el docente deduce un resultado en el aula sin haberlo inducido primero, los estudiantes no pueden saber dónde quiere llegar el docente y perderán interés en lo que se les trata de explicar; en la actualidad los asistentes matemáticos facilitan en gran medida los procesos inductivos, en particular los que permiten hacer representaciones dinámicas. Las tareas de demostración son necesarias no solo para lograr una formación matemática del estudiante, estas tareas contribuyen a su formación conceptual, ya que para realizar este tipo de tareas tiene que basar su trabajo en la aplicación de conceptos ya aprendidos que se convierten en herramientas. Se debe lograr que los estudiantes adquieran hábitos y habilidades para hacer representaciones gráficas, no solo como respuesta a una tarea, sino como recurso para materializar su pensamiento, de modo que logre identificar las vías de solución de una tarea. Muchos docentes asumen que el estudiante define, cuando repite una definición, pero en este caso el estudiantes solo está repitiendo de manera mecánica un conjunto de palabras que incluso pudiera no comprender; para entrenar a los estudiantes en la habilidad de definir es necesario pedirle que defina un objeto matemático a partir de diferentes representaciones del mismo, por supuesto que es poco probable que los estudiantes tengan éxito completo, por ejemplo se les puede pedir que expresen la definición de triángulo, a partir de la representación de diferentes triángulos y partiendo de los diferentes planteamientos de los estudiantes construir la definición correcta. El docente que no está al tanto de la necesidad de estas diferentes actividades para el aprendizaje matemático de sus estudiantes, no se preocupa por plantear a sus estudiantes diferentes actividades matemáticas y se limitará a plantear solo tareas de cálculo.

Usualmente los docentes quieren que sus estudiantes logren la apropiación conceptual minimizando la actividad procesal, lo que realmente conduce a limitar el trabajo conceptual de los estudiantes, pues al limitar la actividad procesal, quedan aspectos del concepto que el estudiante no incorpora en el concepto. Por ejemplo el concepto de límite funcional, dado que la dificultad del mismo requiere un amplio trabajo procesal, comenzando con una descripción literal que permita a los estudiantes calcular límites de funciones continuas como: $\lim_{x\to 3}(x^2+2x-3)$, en general: $\lim_{x\to x_0} f(x)$ siendo f(x) continua en x_0, después que los estudiantes hayan trabajado con este tipo de tareas, es necesario plantear la definición formal, esto es: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ si y solo si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces: $|f(x) - L| < \varepsilon$; definición que tiene que ser conectada a los cálculos anteriores para que los estudiantes le puedan encontrar sentido a cada uno de los componentes de la definición, lo cual se hace llevando a la práctica la definición con tareas como la siguiente: Probar que $\lim_{x\to 2}(x^2-4x) = -4$ demostrando que para todo ε tal que $|(x^2-4x)-(-4)| < \varepsilon$ existe un δ tal que $|x-2| < \delta$. Se debe explicar a los estudiantes que el hecho de que para todo ε exista un δ se expresa mediante una relación funcional de la forma: $f(\varepsilon) = \delta$, en este caso: $|(x^2-4x)-(-4)| = |(x^2-4x+4)| = |(x-2)^2| < \varepsilon$, por último: $|x-2|^2 < \varepsilon$ o bien $|x-2| < \sqrt{\varepsilon}$, luego cualquiera que sea el ε se toma $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, en otras palabras: $f(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$. Este

resultado se debe ilustrar gráficamente mediante un asistente matemático como el GeoGebra que permita la animación, obteniéndose gráficos como los siguientes, que permiten apreciar la dependencia ε, δ. Donde variando los valores de ε, se obtienen los δ correspondientes de manera automática:

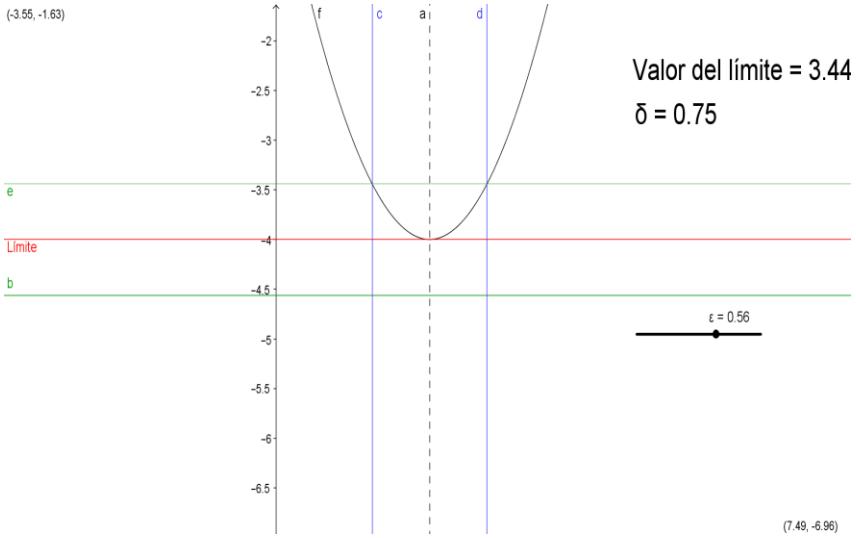


Figura 1. Aproximación épsilon delta

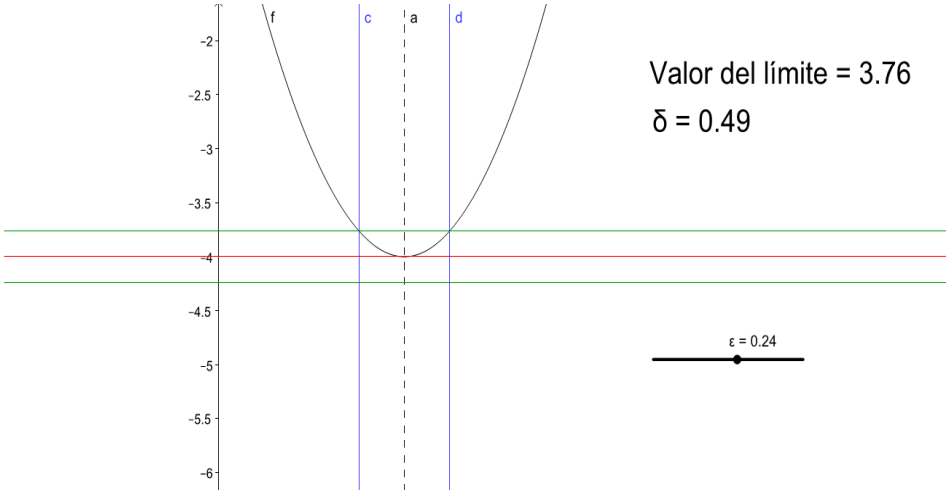


Figura 2. Aproximación épsilon delta

Se deben plantear otros ejercicios de este tipo, pero ahora con funciones que presenten discontinuidades como los siguientes: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=4$, $\lim_{x\to 0}3xsen\left(\frac{1}{x}\right)=0$. En este tipo de tareas es importante hacer una selección adecuada para evitar complicaciones en el trabajo algebraico que desvíen la atención de los estudiantes, de lo esencial de la tarea que es encontrar la relación funcional ε, δ.

Se debe destacar que lo orientado aquí es solo el proceso inicial para el trabajo con los límites y la apropiación del concepto, pero dada la interrelación que se utiliza entre las diferentes formas de materializar el concepto propicia una vía adecuada para que los estudiantes se apropien de los aspectos esenciales del concepto.

Un aspecto al que se le debe prestar atención en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática es que los estudiantes aprecien el carácter sistémico de esta ciencia, dado que la Matemática es medio y objeto en sí misma y por lo tanto cada propiedad o concepto aprendido es una herramienta para aprender nuevos contenidos; por lo que el aprendizaje de un contenido matemático no termina cuando el estudiante se apropia del mismo, es necesario que lo incorpore a la estructura sistémica de la Matemática, esto es, cada objeto matemático debe ser asimilado en su carácter individual y sistémico.

Lo cual se puede ilustrar con las funciones trigonométricas, los estudiantes deben concientizar que estas funciones son unas herramientas de gran utilidad en el trabajo matemático, por ejemplo para expresar el área de un triángulo como el producto de dos lados por el ángulo comprendido dividido por dos; para la solución de determinados problemas esta expresión del área es más conveniente, como es el caso para probar que en triángulos semejantes sus áreas son proporcionales también; la estructura sistémica de la Matemática se manifiesta en las ecuaciones de Euler: $e^{ix} = \cos(x) + isen(x)$ y $e^{-ix} = \cos(x) - isen(x)$ donde evaluando en π se obtiene: $e^{i\pi} = -1$ que relacionan dos de las más importantes constantes de la Matemática, con la unidad imaginaria y la unidad real, lo cual destaca la fuerte estructura sistémica de la Matemática. Además, las funciones trigonométricas están presentes en las series de Fourier, las que a su vez son una herramienta fundamental para resolver ecuaciones en derivadas parciales.

Lo fundamental aquí desde el punto de vista didáctico es que el docente logre convencer a sus estudiantes que cada contenido que aprenden es una herramienta para aprender nuevos contenidos y que no existe un concepto matemático que no esté articulado en la estructura sistémica de la Matemática.

El carácter singular del modelo matemático se refiere a un modelo específico de un problema específico, lo que implica que los coeficientes necesarios para la conformación del modelo son los datos particulares del problema, esto es, valores numéricos, para ilustrar lo planteado se considera el siguiente problema: En una cartera hay 280 pesos en billetes de 5, 10 y 20 pesos, se sabe que hay un total de 26 billetes y que hay la misma cantidad de billetes de 5 y de 20. ¿Cuántos billetes hay de cada denominación? Designando "x" la cantidad de billetes de 5 y de 20, por "y" la cantidad de billetes de 10, el modelo para este problema específico, que por supuesto tiene un carácter singular es:

$\begin{cases} 2x + y = 26 \\ 5x + 20x + 10y = 280 \end{cases}$; pero si el problema se expresa en una forma general, esto es, En una cartera hay "a" pesos en billetes de 5, 10 y 20 pesos, se sabe que hay un total de "b" billetes y que hay la misma cantidad de billetes de 5 y de 20. ¿Cuántos billetes hay de cada denominación? En este caso el modelo se plantea en forma general, o sea, $\begin{cases} 2x + y = b \\ 5x + 20x + 10y = a \end{cases}$, su carácter general se manifiesta en que la solución satisface el problema cualquiera que sea la cantidad de billetes y el total en dinero. Por lo que el carácter general del modelo es un medio de generalización, puesto que con su utilización se pueden obtener familias de objetos para ser modelados y simbolizados a través de una estructura común, lo que propicia la significatividad lógica en la integración de conceptos, procedimientos y relaciones.

Se debe destacar que el modelo en su carácter general siempre se expresa mediante parámetros, a través de los cuales se logra la generalidad del modelo, representando clases y unificándolas, para analizar lo general en lo particular, resolver categorías de problemas y formular soluciones a un nivel general, lo cual se evidencia en el hecho de que el modelo para demostrar una propiedad en general siempre se expresa mediante parámetros.

Incorporación de la epistemología de la Matemática en la actividad de los docentes

Se desarrollaron tres talleres en los que participaron doce docentes que imparten diferentes asignaturas de Matemática en la universidad APEC, impartidos por el primer autor del presente trabajo con una duración de dos horas cada uno, en los que se explicó a los participantes el contenido que se describe en el trabajo, se detallaron los diferentes aspectos tratados y se incluyeron varios ejemplos para profundizar en los temas tratados.

Los talleres se iniciaban con la exposición de una clase por alguno de los participantes; a las preguntas: ¿por qué explica el contenido de esa manera?, ¿por qué usa esos ejemplos?, ¿por qué asigna ese tipo de tarea?; las respuestas en más del 90% de los casos las fundamentaban en su experiencia personal.

En el caso del uso de diferentes registros semióticos para lograr la apropiación conceptual se hizo énfasis en el trabajo con asistentes matemáticos, en particular el GeogGebra por sus posibilidades dinámicas y el Maple por sus amplios recursos. Una situación ilustrativa es la representación de los puntos notables del triángulo, baricentro, circuncentro, hortocentro y el incentro donde al cambiar la forma del triángulo se puede ver el movimiento de dichos puntos. Todos los participantes estuvieron de acuerdo en que efectivamente los estudiantes tienen que trabajar con diferentes representaciones de un concepto para poder apreciar los diferentes aspectos de este, aunque la mayoría afirmó que de un modo u otro utilizaban más de una representación del concepto.

En cuanto al trabajo con las diferentes actividades a través de las cuales se desarrolla la Matemática, la mayoría de los participantes alegaron falta de tiempo para desarrollar todas las diferentes actividades, en particular en lo que respecta actividades para el desarrollo de la intuición y las demostraciones; en el primer caso se les ilustró como usando un asistente matemático como el GeoGebra los estudiantes pueden materializar las hipótesis de teoremas como el de Rolle, el del valor medio, etc. pueden ver como $\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ tiende al gráfico del cos(x) cuando h tiende a cero. Además, un aspecto fundamental en lo que respecta al uso de la intuición en la docencia radica en que esta debe preceder a la demostración o uso de una propiedad o teorema, pues la materialización del resultado al que se quiere arribar propicia que los estudiantes puedan saber hacia dónde se dirige la explicación del docente y no en la forma en que aparecen en muchos textos de Matemática donde se plantea la interpretación geométrica del teorema posterior a la demostración de este.

En lo que respecta a las tareas de demostración, muchos docentes la asocian solo a las demostraciones de los teoremas o propiedades que están dentro del contenido de la asignatura que explican, algunas de las cuales no son apropiadas para demostrar en clases, por el tiempo que toma realizarlas o por el nivel de complejidad que puedan presentar; pero se puede asegurar que en todo contenido matemático existen ejercicio de demostración interesantes, asequibles a

diferentes niveles cognoscitivos del grupo y que permiten entrenarlos en la actividad de demostrar.

En los citados talleres se le mostraron a los docentes diferentes ejemplos algunos de los cuales se ilustran a continuación:

- Probar que la ecuación $x^5 + x = \lambda$ tiene exactamente una solución real cualquiera que sea el valor de λ, en el conjunto de los números reales.

Tomando la función $f(x) = x^5 + x - \lambda$ es fácil ver que $\lim_{x \to -\infty} f(x) \to -\infty$ y que $\lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$ y como la función es continua, siempre tendrá solo una solución cualquiera que sea el valor de λ.

Como se puede apreciar es una demostración sencilla, donde además se usa el cálculo de límite como herramienta.

- Se tiene una circunferencia con centro en el punto O, y un punto fijo P en el interior de tal circunferencia, AC y BD son dos cuerdas cualesquiera de la misma circunferencia que contienen a dicho punto P. Probar que: AP/BP=DP/CP.

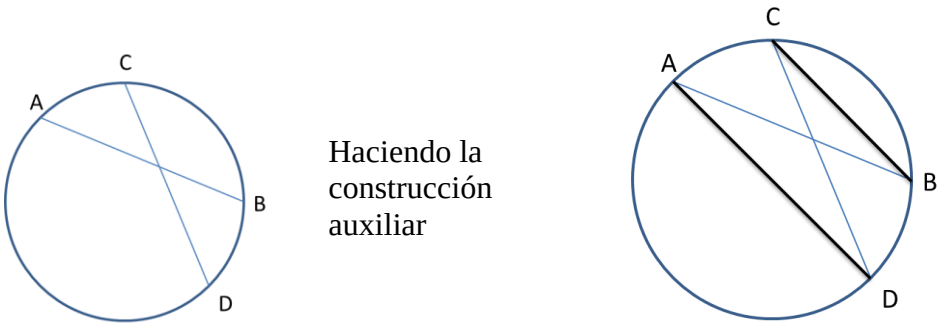


Figura 3. Gráfico auxiliar

Los triángulos APD y CPB son semejantes, los ángulos en P opuestos por el vértice, ang ADC y ABC subtienden el mismo arco, lo mismo con los ang DAB y BCD. Por semejanza de triángulo se tiene: AP/BP=DP/CP.

La geometría es un contenido donde abundan ejercicios de demostración muy prácticos para entrenar a los estudiantes en esta actividad.

- Demostrar la ley de los senos en un triángulo acutángulo.

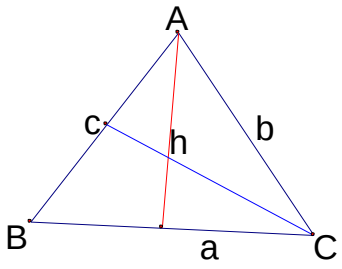


Figura 4. Gráfico auxiliar

sen(B) = h/c, sen(c) = h/b de donde: h = csen(B) y h = bsen(c) luego: csen(B) = bsen(C) o bien: sen(B)/b = sen(C)/c .(I)

Usando la altura correspondiente al vértice C, del mismo modo se obtiene: sen(A)/a = sen(C)/C (II) . Relacionando (I) y (II) se tine finalmente: sen(B)/b = sen(C)/c = sen(A)/a

En este caso es muy importante aclarar a los estudiantes que no es una demostración general, pues no se ha considerado el caso en que la altura pueda caer fuera del triángulo, aunque por supuesto la ley de los senos se cumple para todo tipo de triángulo.

También se debe tener en cuenta que para que los estudiantes trabajen de forma independiente, muchas veces es necesario darles algunas orientaciones iniciales, como en este ejemplo, construir la altura del triángulo.

- Demostrar que si 3n + 1 es un cuadrado, entonces n + 1 es la suma de 3 cuadrados.

3n + 1 = $(3k + 1)^2$, sumando 1 en ambos términos: $n+1=\frac{(3k+1)^2-1}{3}+1$ o bien $n+1=3k^2+2k+1=k^2+k^2+(k+1)^2$ de donde n + 1 es la suma de 3 cuadrados.

Aquí se ha querido ilustrar que independientemente del contenido que se explique, siempre existen tareas sencillas que permiten entrenar a los estudiantes en el desarrollo de las demostraciones matemática.

Resultados

Una vez concluidos los talleres los docentes participantes expresaron que los mismos le resultaron de gran ayuda para el desarrollo de sus actividades docentes, ya que, aunque en algunos casos hacían algunas de las cosas que se trataron en los talleres, lo hacían por intuición y no porque conocieran los fundamentos didácticos de los mismos.

En cuento a los cambios de registros de representación, aunque generalmente usaban más de uno, no conocían la necesidad y utilidad de los mismos en la formación conceptual de los estudiantes.

Aseguraron que les fue útil y prestaran especial atención al tránsito del proceso al concepto en sus actividades docentes y estuvieron de acuerdo en la importancia de lograr que los estudiantes aprecien cada concepto que aprenden como una herramienta para el trabajo matemático y no como algo que necesitan saber para pasar una prueba.

Consideraron muy importantes las ideas que se le plantearon para entrenar a sus estudiantes en las demostraciones matemáticas y estuvieron de acuerdo con la importancia de esta actividad en la formación de los estudiantes.

CONCLUSIONES

En el trabajo se muestra una modesta contribución al desarrollo de una didáctica de la Matemática desde sus características intrínsecas, esto es, su ontología y epistemología.

La explicación de las características epistemológicas planteadas y su ejemplificación en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática ilustran su importancia y el por qué se deben tener en cuenta en dicho proceso.

Los talleres desarrollados y los resultados planteados por los docentes que recibieron dichos talleres permitieron una comprobación de la necesidad de instruir a los docentes sobre la problemática analizada, Desde luego no se plantea que todos los docentes que imparten Matemática desconozcan la epistemología y ontología de la Matemática, pero son aspectos que

todos o por lo menos la gran mayoría de los docentes que trabajan en esta disciplina deben manejar.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Báez, N; Pérez, O y Blanco, R. (2018). Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje.

Disponible en: https://revistas.unimilitar.edu.co/index.php/ravi, 11(1).

Byas, R. & Blanco, R. (2017). Didáctica de la Matemática en la formación docente. SEDUCA. Sistema Editorial Universitario Centroamericano.

Byas, R. (2018). El proceso enseñanza-aprendizaje de la Matemática. Fundamentos ontológicos y epistemológicos. SEDUCA. Sistema Editorial Universitario Centroamericano.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer. pp. 95-126.

Duval R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS, 61, pp. 103-131.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES, 22(3), 237-284

Medina, M. (2017). Estrategias para el desarrollo del pensamiento lógico matemático. DIDASC@LIA: DIDÁCTICA Y EDUCACIÓN. 9(1), 125-132.

Radford, L., Schubring, y Seeger, F. (2011). Signifying and Meaning-Making in Mathematics Thinking, Teaching and Learning: Semiotic Perspectives, EDUCATIONAL STUDIES IN MATHEMATICS, SPECIAL ISSUE. 77(2-3), 149-397.

Sabonete, J. Gamboa, M. y Mestre, U. 2015. Propuesta didáctica para el diseño de problemas Matemáticos en escuelas angoleñas de segundo ciclo. DIDASC@LIA: DIDÁCTICA Y EDUCACIÓN. 7(5), 155-163.

Vigotsky, L. (1981). The Instrumental Method in Psychology. En J. Wertsch (Ed.), The Concept of Activity in Soviet Psychology. Armonk, N.Y.: Sharpe. (pp. 135–143)

Tall, D. (2007). A life-time's journey from definition and deduction to ambiguity and insight. MEDITERRANEAN JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 7 (2), 183–196.

Yero, L. Cutiño, A. Rodríguez, A. Guti'rrez, J. Marcillo, J. (2018). Falacias que atentan contra el desarrollo del pensamiento lógico matemático. DIDASC@LIA: DIDÁCTICA Y EDUCACIÓN. 9(4), pp.227-238.