Mikarimin. Revista Científica Multidisciplinaria. ISSN 2528-7842
Año 2025, Vol. XI, No. 2 (mayo-agosto), pp. 153-174

DOI: https://doi.org/10.61154/mrcm.v11i2.3494

ARTÍCULO DE REVISIÓN

CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

La conceptualización y la modelación en la enseñanza actual de la matemática

Conceptualization and modeling in current mathematics education

Osdeiny Suárez Torres[I], Ramón Blanco Sánchez[I], Neel Báez Ureña [II]

[I] Universidad de Camagüey, Camagüey, Cuba.
osuarest@gmail.com, ramonblancord805@gmail.com. ORCID: https://orcid.org/0009-0004-9004-4556 , https://orcid.org/0009-0005-7149-2000

[II] Universidad Autónoma de Santo Domingo. República Dominicana.
neelbaez02@gmail.com ; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7208-4299

Fecha de recepción: *23/3/2024* **Fecha de aceptación:** *21/4/2025*

Fecha de revisión: *25/3/2025* **Fecha de publicación:** *1/5/2025*

RESUMEN

En el contexto actual, los medios de cómputo brindan innumerables recursos para el trabajo matemático, por lo que se consideró esencial orientar la labor del docente al fortalecimiento de redes conceptuales y habilidades de modelación, elementos estrechamente vinculados. El objetivo del estudio fue mostrar recursos didácticos para contribuir a la formación conceptual y el desarrollo de habilidades de modelación en estudiantes de ingeniería. El mismo se sustentó en un análisis de experiencias docentes desarrolladas por profesores de la Universidad de Camagüey, con más de diez años de práctica, complementado con una revisión bibliográfica especializada; donde se identificaron los cambios de representación semiótica como recursos didácticos clave. El carácter conceptual de los objetos matemáticos permitió que estas representaciones mostraran diferentes características del objeto de estudio, haciendo que los

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

estudiantes pudieran comprenderlo en toda su integridad. Asimismo, se destacó la importancia del uso adecuado y preciso del lenguaje matemático en los procesos de modelación. A partir de esta triangulación, se identificaron coincidencias teóricas y prácticas que permitieron mostrar recursos didácticos para contribuir a la formación conceptual y el desarrollo de habilidades de modelación en estudiantes de ingeniería. Entre los resultados más relevantes se encuentra la eficacia del uso coordinado de representaciones semióticas y del lenguaje matemático en la mejora de la comprensión y aplicación de los contenidos, para formación conceptual y la habilidad de modelación, lo cual permitió concluir que dichos recursos constituyen herramientas fundamentales para optimizar el aprendizaje en este nivel educativo.

PALABRAS CLAVE: formación conceptual; modelación matemática; representación semiótica, enseñanza de la Matemática.

ABSTRACT

In the current context, computer media provide countless resources for mathematical work, so it was considered essential to guide the work of teachers in strengthening conceptual networks and modeling skills, which are closely linked. The objective of the study was to show didactic resources to contribute to conceptual formation and the development of modeling skills in engineering students. It was based on an analysis of teaching experiences developed by professors of the University of Camagüey, with more than ten years of practice, complemented with a specialized bibliographic review; where semiotic representation changes were identified as key didactic resources The conceptual character of mathematical objects allowed these representations to show different characteristics of the object of study, so that students could understand it in all its integrity. Likewise, the importance of the adequate and precise use of mathematical language in the modeling processes was emphasized. From this triangulation, theoretical and practical coincidences were identified that allowed showing didactic resources to contribute to conceptual formation and the development of modeling skills in engineering students. Among the most relevant results is the effectiveness of the coordinated use of semiotic representations and mathematical language in the improvement of the understanding and application of contents, for conceptual formation and modeling skills, which allowed concluding that these resources constitute fundamental tools to optimize learning at this educational level.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

KEYWORDS: *conceptual formation; mathematical modeling; semiotic representation; mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

En la presente década, los software para al trabajo matemático (referidos en el presente trabajo como “asistentes matemáticos”) han alcanzado una eficiencia considerable, lo cual implica que el trabajo docente basado en algoritmos vaya dejando de ser una prioridad en la enseñanza de esta ciencia, dejando espacio para la formación conceptual y el desarrollo de habilidades de modelación en los estudiantes; planteando un reto a docentes e investigadores en el área de la enseñanza de la Matemática.

Con el objetivo de abordar esta problemática se ha empleado una metodología clásica, partiendo de la identificación del problema: la falta de desarrollo conceptual de los estudiantes que los limitan en las aplicaciones de la matemática. Se realizó una búsqueda de información actualizada y se organizó de modo que permitió seleccionar las fuentes que sustentan desde el punto de vista teórico el trabajo realizado. El análisis de la información permitió las propuestas didácticas que se muestran.

En este contexto, el reto antes mencionado, está determinado por el incesante desarrollo tecnológico, que demanda cada vez más individuos que aprecien la Matemática y tengan un desarrollo de habilidades del pensamiento matemático (Guaypatin et al., 2024; Guner, 2020). Aquí el problema se debe en gran parte a que resulta más fácil para el maestro lograr que los estudiantes mecanicen ciertos procesos sin llegar a una formación conceptual; apreciable en los resultados de los estudiantes en los exámenes aplicados por los maestros, donde aparentemente se evidencia aprendizaje y comprensión, pero investigadores confirman las concepciones que se tienen del aprendizaje memorístico y falta de conocimiento conceptual (Sidelil y Nellie, 2020).

Por lo que resulta necesario que los docentes adquieran conciencia de que deben lograr un aprendizaje conceptual, como única vía para que los estudiantes puedan llegar a modelar problemas; un paso en esa dirección en el uso de herramientas digitales para cálculos simbólicos, radica en que los usuarios necesiten de una comprensión conceptual del procedimiento con el que trabajan, (Angulo et al., 2020; Abranovich, 2015).

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Los estudiantes que no llegan a comprender un concepto son incapaces de usarlo y trabajar con el mismo, y pueden tener deficiencias en sus conocimientos que perduran en el tiempo. Además, se debe tener en cuenta que los estudiantes cometen errores en sus producciones cuando trabajan cualquier dominio matemático, pero especialmente cuando resuelven problemas de aplicaciones, donde necesitan hacer aplicaciones conceptuales, (Stephens et al., 2021; Hoth et al., 2022).

Resulta indudable que el desarrollo tecnológico actual requiere lograr en los estudiantes de ingeniería la habilidad de modelar, aunque ciertamente es una habilidad que demanda esfuerzos por docentes y estudiantes, (Biembengut y Hein, 2004). No todos los contenidos de Matemática son propicios para lograr que los estudiantes modelen, o mejor dicho hay contenidos más propicios que otros, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales ordinarias son propicias para que los estudiantes trabajen en actividades de modelación, por una parte, porque son una herramienta matemática para la modelación de una gran variedad de problemas y por otra, porque permiten la modelación desde problemas relativamente sencillos hasta problemas complejos.

La habilidad de modelar se debe trabajar desde los primeros grados, pero generalmente no se le pone la atención y esfuerzo que la misma requiere y los estudiantes avanzan por los diferentes niveles educativos con un pobre desarrollo de esta habilidad, por lo que en el presente trabajo se propone un enfoque didáctico sustentado fundamentalmente en el trabajo con las ecuaciones diferenciales ordinarias, para entrenar estudiantes de ingeniería en las actividades de modelación.

DESARROLLO

La revisión realizada permite avalar la presencia generalizada del trabajo algorítmico en la enseñanza, lo cual entra en contradicción con la necesidad de fomentar el desarrollo conceptual de los estudiantes, pues el uso eficiente de los medios de cómputo para la resolución de problemas aplicados exige conocimientos conceptuales y una base teórica sólida. Esta constatación, que coincide con la literatura especializada, se refleja asimismo en la experiencia de los autores en el trabajo docente en la enseñanza de la matemática para Ingeniería: los alumnos tienden a privilegiar métodos mecánicos y buscan atajos algorítmicos para automatizar las aplicaciones matemáticas, postergando así la comprensión profunda de los fundamentos conceptuales.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Bases teóricas.

Se seleccionaron trabajos de autores reconocidos por la comunidad especializada sobre el tema, que conforman un sustento coherente para elaborar el análisis realizado y la propuesta de abordar el problema.

Dado que en el proceso de modelación se requiere de la representación del problema en diferentes formas, la teoría sobre los cambios de registros de representación semiótica, iniciada por R. Duval, Duval (1993) y retomada por muchos autores reconocidos como D'Amore y Fandiño Pinilla (2007), Presmeg (2006) y Arzarello (2006), entre otros, juega un papel fundamental en el tema a tratar, por otra parte siempre se debe tener en cuenta que dado el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos, los cambios de representación semiótica son necesarios para que los estudiantes puedan acceder al objeto matemático.

Evidentemente, como planteó Vigoysky, el concepto en su forma acabada no puede ser puesto en la mente del estudiante (Karpov, 2013); por lo tanto, los estudiantes tienen que realizar acciones sobre los objetos matemáticos para llegar a apropiarse de los conceptos necesarios.

A tales efectos la teoría APOE (acción proceso, objeto, esquema) de Dubinsky et al. (2019), describe el tránsito del proceso al objeto, el cual se inicia con acciones sobre el objeto de estudio (ACCIÓN), estas acciones iniciales se van asociando en base a características comunes y conforman un proceso (PROCESO), la reiteración de actividades procesales que conducen a un determinado resultado permiten identificar este resultado como un objeto (OBJETO), por último, el referido objeto en su forma conceptual debe ser incorporado a la red cognoscitiva que posee el estudiante, para que pueda ser aplicado por este (ESQUEMA).

Desde el proceso se puede arribar al concepto, pero muchas veces el referido proceso transita por un algoritmo cuya ejecución en diferentes situaciones puede conducir al concepto, pero desafortunadamente ocurre que el aprendizaje se queda en el algoritmo y no arriba al concepto. De acuerdo con la teoría APOE, el concepto es útil para el trabajo del estudiante cuando lo incorpora en su red conceptual, lo cual le permite usarlo en interrelación con otros conceptos ya aprendidos.

Otro aspecto a tener en cuenta como elemento básico en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática es el lenguaje, dado que la eficiencia en el trabajo matemático incluye la capacidad de comunicarse y razonar a través del lenguaje escrito y hablado (Hughes y Fries,

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

2015). El lenguaje matemático es altamente especializado, conciso, no admite sobreentendidos y está asociado a la lógica formal; por ejemplo: la condición "si… entonces", debe ser comprendida por los estudiantes en su valor lógico; esto es, el condicionante "si", expresa la necesidad del cumplimiento de determinadas hipótesis para que la consecuencia planteada sea válida. Además, se debe agregar que la función es un elemento clave en el lenguaje matemático, ya que a través de las mismas se establecen las relaciones entre los objetos matemáticos.

Modelaciones iniciales.

Aunque el tema de variaciones relacionadas, se estudia inicialmente en el cálculo diferencial, previo a las ecuaciones diferenciales, es oportuno retomar el tema ya que conduce a modelos sencillos que los estudiantes pueden desarrollar y permiten enfatizar el hecho de por qué las derivadas son tan relevantes.

Las derivadas facilitan modelar una diversidad de fenómenos en la ciencia, la ingeniería, la propia matemática y expresan una variación instantánea; así, por ejemplo, la variación del espacio (S) que recorre un móvil en un instante de tiempo (t) determina la velocidad del móvil en ese instante, lo cual se expresa $\frac{ds}{dt} = v$; de la misma forma, la variación instantánea de la velocidad se expresa como $\frac{dv}{dt} = a$, siendo (a) la aceleración en un instante dado; también, la variación instantánea de la carga eléctrica (Q) representa la intensidad de la corriente, esto es $\frac{dQ}{dt} = I,$ lo cual se debe a que la derivada es la razón de un incremento cuando el incremento tiende a cero, esto es: $f' = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Lo cual justifica que la derivada sea la herramienta matemática para modelar cualquier fenómeno de variación instantánea. Teniendo como característica que hay solo una variable independiente el tiempo (t) y una cantidad no determinada pero finita, que son dependientes de esa variable (t), estando relacionadas entre sí. Es conocido los valores de la derivada de algunas de las variables dependientes y se desea determinar la derivada de una o varias de las variables en dicho instante de tiempo (t).

Debido a que los problemas de aplicación son los que más se le dificultan a los estudiantes es importante que cuenten con un esquema o modelo para su interpretación y comprensión, que le ayude a cómo analizar, entender y afrontar estos problemas, en este aspecto juegan un rol fundamental como herramienta didáctica los asistentes matemáticos. En el presente estudio, por ser uno de los más difundidos para la enseñanza de las matemáticas, sus características y

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

bondades por criterio de los autores y otros investigadores como (Freudenthal, 1979 ; Kutzler, 1999); González et al., 2021), entre otros, se utiliza GeoGebra como recurso ilustrativo.

Para ejemplificar de manera práctica cómo los asistentes matemáticos facilitan el análisis y la visualización de problemas de tasas de cambio, a continuación, se presenta el siguiente caso:

- Se tiene un tanque con forma de cono circular recto, de 4m de diámetro y 8m de altura, el cual es llenado por una bomba de agua a razón de $500cm^3/s$, se desea conocer a la altura de 4m, la velocidad a la que asciende el agua y cambia el radio en ese preciso instante de tiempo en el que el agua alcanza la altura mencionada. Ver figura 1.

Para resolver este problema, es necesario tener presente y entender por parte de los alumnos la relación entre el volumen de un cono, su altura y radio. El volumen (V) del cono es expresado como $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$. En este caso, se ilustra mediante el asistente matemático el cono, generado este por el triángulo rectángulo ABF como se muestra en la figura 1; se solicita en el problema determinar la velocidad a la que asciende el agua y cambia el radio en ese preciso instante de tiempo, lo que crea en su interior el triángulo rectángulo ACE, que permite por medio de las razones entre sus lados expresar el radio en función de la altura y viceversa que $r = \frac{1}{4} \cdot h$ y $h = 4 \cdot r$, donde todos estos conocimientos son dominados por los estudiantes de grados precedentes.

Sustituyendo el radio (r) en la expresión que permite el cálculo de volumen a la altura fijada se obtiene que $V_h = \frac{1}{48} \cdot \pi \cdot h^3$. La bomba de agua llena el tanque a una tasa constante de $500 \frac{cm^3}{s} = 0.0005\ m^3/s$. Esto es igual a la tasa de cambio del volumen con respecto al tiempo, es decir, $(\frac{dv}{dt})$.

Entonces permite plantear la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{48} \cdot \pi \cdot h^3\right)$ relacionando el volumen en función del tiempo, resolviendo la derivada implícita se alcanza como resultado $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{16} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$, pero lo que se necesita conocer es $\left(\frac{dh}{dt}\right)$ porque la velocidad en la que asciende no es más que una altura, por lo que es necesario despejar para obtener la Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) $\frac{dh}{dt} = \frac{16 \cdot (dv/dt)}{\pi \cdot h^2}$, sustituyendo la relación de la tasa de cambio $\frac{dv}{dt} = 500cm^3/s$ y su altura $h = 4m = 400\ cm$, se adquiere su valor $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2000} m/s$, que no es más que la velocidad a la que asciende el agua cuando alcanza la altura de $4m$ es de $0.0005\ m/s$.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Para encontrar cómo cambia el radio en ese instante, se utiliza la relación $h = 4 \cdot r$ y se diferencia con respecto al tiempo para obtener la ecuación diferencial $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right)$, resolviendo su derivada implícita y dando origen a la EDO $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \frac{dv}{dt}$ de la cual se obtiene como resultado que el radio cambia a una razón de $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{8000\pi} m/s$ cuando el agua alcanza la altura fijada.

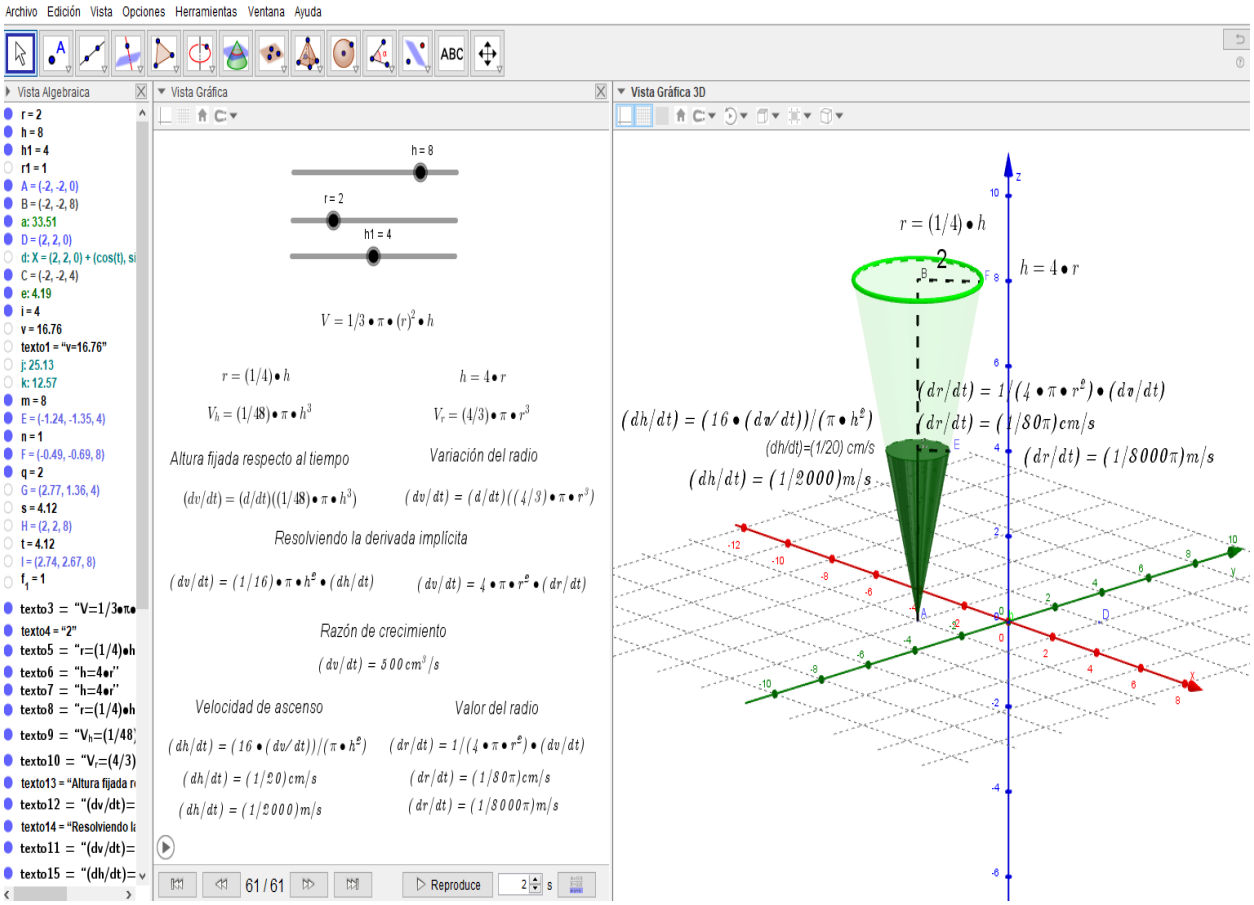


Figura 1.

Problema ejemplo: velocidad a que asciende el agua.

Otro ejemplo sencillo, similar al descrito en el ejemplo anterior que se puede utilizar para enfatizar la importancia del conocimiento de la derivada para la Ecuación Diferencial (ED) y en particular las EDO donde expresa una variación instantánea es el de un hielo en forma de cubo que se derrite donde hay solo una variable independiente, el tiempo (t) teniendo como datos su volumen, la velocidad a la que se derrite y se necesite conocer la razón de cambio de su superficie. Es de conocimiento de los estudiantes la expresión de cálculo para determinar su volumen $V = a^3$ y el área de cada una de sus seis caras $A = a^2$. Ver figura 2.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

La velocidad a la que se derrite que se hace referencia no es más que $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, lo que permite junto a las expresiones de área y volumen establecer los modelos matemáticos, en el caso del volumen se conoce $\frac{da}{dt} = \frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)}{3a^2}$, lo que hace posible modelar la tasa de cambio de la superficie del cubo de hielo mientras se derrite y se reducen sus caras así como expresar la reducción de las áreas de estas caras mediante la EDO $\frac{dA}{dt} = 12a\frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)}{3a^2}$, ilustrando para la comprensión los cambios y reducción mediante el asistente matemático, dejando a su vez por sentado la importancia y utilidad de la derivada para las ED y el de estas para la comprensión del mundo físico que nos rodea (Revelo y Yánez, 2023).

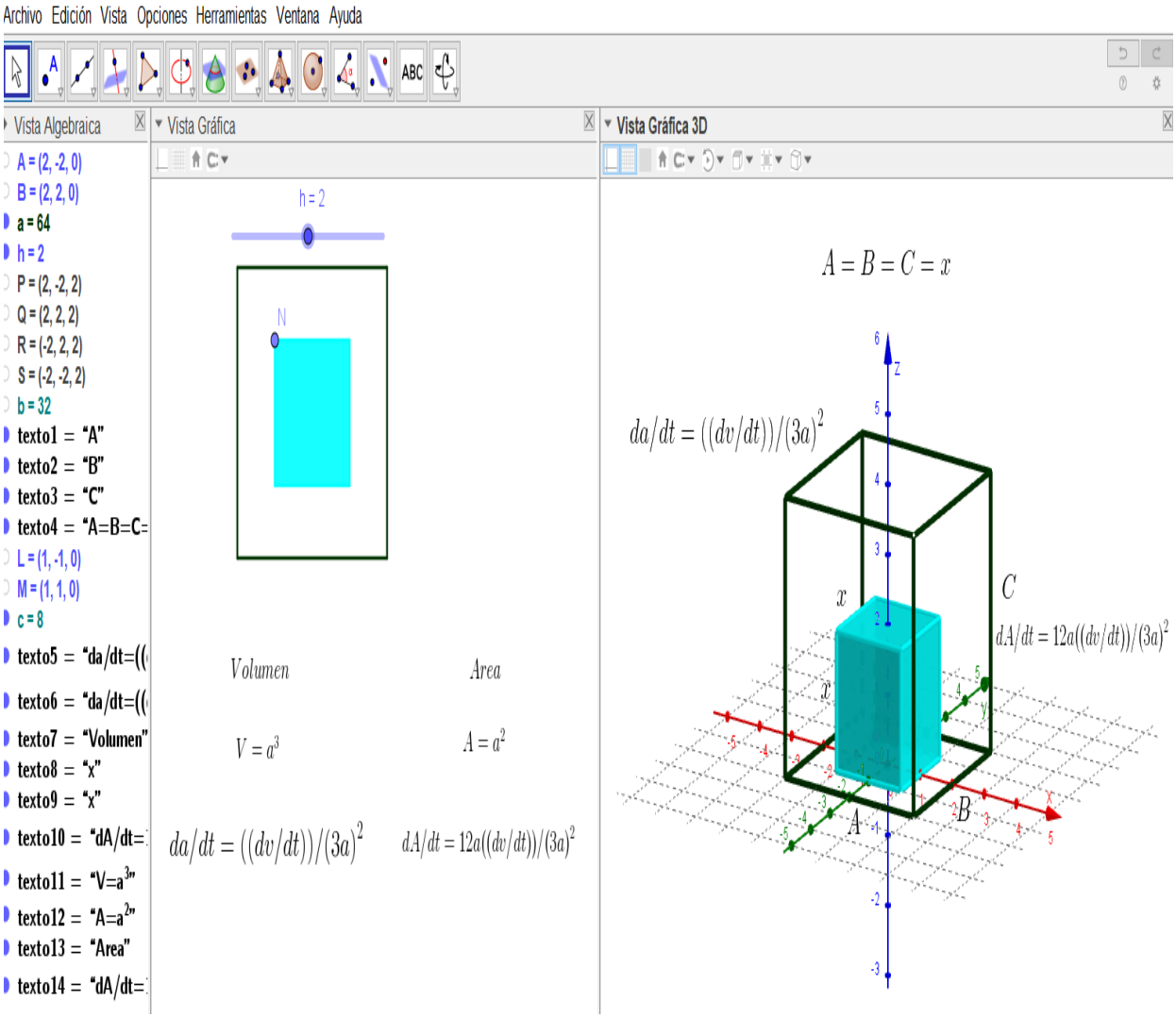


Figura 2.

Problema ejemplo: razón de cambio de la superficie del hielo.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Diferentes casos de modelación.

La modelación y resolución de los problemas de variaciones relacionadas, permite que los estudiantes aprecien el significado de las variaciones instantáneas entre las variables independientes y dependientes en un problema dado, así como en el tránsito de las representaciones analíticas a las gráficas (Mkhatshwa, 2023; Postelnicu y Tintera, 2024); lo cual resulta un entrenamiento necesario para pasar a modelaciones que resultan menos inmediatas y requieren del concepto de derivada como la herramienta matemática para modelar fenómenos de variación instantánea, como se explicó anteriormente.

Una dificultad que se presenta cuando se trata de entrenar a los estudiantes en la modelación de problemas mediante ecuaciones diferenciales, es cuando los estudiantes no han estudiado en física, las leyes a aplicar en la modelación y resolución de un problema dado, como es el caso de un circuito eléctrico, que consiste en resistores, inductores y capacitores, al cual se aplica una fuerza electromotriz.

En este caso una aplicación de las leyes de Kirchoff (Thunibata et al., 2021) conduce a la ecuación: $L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$, donde L es la inductancia, (R) la resistencia, (C) la capacitancia, $E(t)$ la fuerza electromotriz, $q(t)$ la carga y (t) el tiempo. Si al estudiante se le da: L, R, C y $E(t)$ y se le pide calcular la carga (q)**,** Spiegel M. (sf).

En casos como estos, si el estudiante no ha estudiado previamente las leyes de Kirchoff, habría que darle la referida ecuación y el estudiante solo sustituiría los valores correspondientes y resolvería la ecuación diferencial, pero no se puede decir que esté haciendo un ejercicio de modelación.

Por lo que para entrenar a los estudiantes en la modelación se deben utilizar problemas donde los estudiantes tengan los conocimientos necesarios para construir el modelo, como es el caso del siguiente problema:

- Encontrar la ecuación de la curva cuya pendiente en (x, y) es $9x$ y pasa por el origen. El estudiante tiene que construir el modelo, aunque sea un modelo elemental, por supuesto debe saber que $\frac{dy}{dx}$ representa la pendiente de una curva, y en este caso $\frac{dy}{dx} = 9x$ o bien: $dy = 9xdx$, (ecuación que modela el problema) desde donde debe encontrar la respuesta al problema planteado, así integrando se tiene: $\int dy = \int 9xdx$ o bien: $y = \frac{9x^2}{2} + C$ de acuerdo con la información del problema, la curva pasa por el origen C = 0, y la ecuación solicitada es $y = \frac{9x^2}{2}$.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Como en el ejemplo anterior la modelación siempre está asociada al conocimiento conceptual del estudiante, (Zayas et al., 2023), puede suceder que no se llegue a una ecuación específica que modele el problema en cuestión, sino que a partir de conocimientos conceptuales se va obteniendo la información para llegar a la ecuación cuya solución brinda la solución del problema, lo cual se ilustra con el siguiente ejemplo:

- De la función $f(x) = ax^3 + bx$ que pasa por $(1,1)$ y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$. Hallar $a\ y\ b$.

Para el proceso de resolución es necesario concretar la información que brinda el enunciado del problema.

1. Como pasa por $(1,1) \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow a + b = 1$.
2. Dado que la tangente en ese punto es paralela a la recta $3x + y = 0$, tendrá la misma pendiente. Por lo tanto, como $y = -3x$ la pendiente en ese punto es (-3).
3. Así que la pendiente de la tangente en ese punto tiene que ser (-3), esto es $f'(1) = -3$.
4. $f'(x) = 3ax^2 + b$. Se tendrá que cumplir entonces que $3a + b = -3$.
5. Ahora con la información obtenida se puede plantear el modelo matemático que resuelve el problema: $\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{cases} \rightarrow a = -2, b = 3$

Como se puede ver, si el estudiante no maneja adecuadamente la relación entre la pendiente y la derivada de una función, no podrá reunir la información necesaria para poder plantear el modelo que da la solución al problema, que son los valores de los coeficientes.

Evidentemente, la modelación de problemas fuera de la matemática, siempre estarán asociados a diferentes contextos, usualmente a leyes físicas que intervienen en el problema planteado, por lo que es necesario seleccionar problemas donde las leyes físicas implicadas se puedan derivar de variaciones instantáneas comprensibles por los estudiantes, como en el siguiente problema:

- Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de $20ºC$, se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcular el tiempo que dicha barra tardará en alcanzar los $90ºC$, si se sabe que su temperatura aumentó $2ºC$ en un segundo. ¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los $98º\ C$?

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

El estudiante puede comprender que la rapidez con que se enfría un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura ambiente, esto es: $T(t) - Ta$ donde la temperatura del objeto depende del tiempo, se debe tener en cuenta que los objetos tienen diferente conductividad térmica por lo que se debe considerar una constante que refleje la conductividad del objeto, o sea, $K[T(t) - Ta]$, y si se desea apreciar la variación de la temperatura en un instante (t), se tiene la relación $T'(t) = K[T(t) - Ta]$; que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, $y' + p(x)y = q(x)$ cuya solución es:

$y(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int e^{\int p(t)dt} g(t)dt + C\right]$ lo cual debe ser conocimiento previo del estudiante antes de plantear problemas del tipo referido.

Es frecuente que el modelo esté basado en una ley física, en cuyo caso el modelo resulta de la correcta interpretación de la ley física en cuestión, como en el siguiente ejemplo: La Ley de Newton expresa que La ecuación diferencial que modeliza dicho fenómeno es $T'(t) = K[T(t) - Ta]$; cuya solución general (véase el desarrollo teórico) es $e^{T(t)} = T_a + Ce^{kt}$ lo cual representa la materialización del comportamiento del fenómeno a estudiar, y sobre esta materialización el pensamiento sigue su curso (Vigotsky, 1995).

Para lograr la solución del problema no basta lograr la construcción del modelo correspondiente, se requiere además interpretar los componentes del modelo según los datos del problema, lo que enfatiza el hecho de que concepto y modelo están estrechamente vinculados (Barragán-Moreno et al., 2024).

La temperatura ambiente en este caso es $Ta = 100$, mientras que la temperatura inicial es $T(0) = 20$. Por lo tanto, $T(0) = 100 + Ce^{K0} = 100 + C \Rightarrow C = -80$, por otra parte, como la temperatura aumentó $2º\,C$ en 1 seg. Se tiene que $T(1) = 22$. Por tanto: $T(1) = 100 - 80e^{K} = 22 \Rightarrow 78 = 80e^{K}$, de donde se obtiene el valor de $K = ln\left(\frac{78}{80}\right)$ lo que permite arribar al modelo ajustado a las condiciones específicas del modelo planteado, esto es: $T(t) = 100 - 80e^{t\,ln\left(\frac{78}{80}\right)}$.

Como se puede apreciar cada resultado se materializa en una representación semiótica, desde la cual el pensamiento sigue su curso (Quintana et al., 2022).

Finalmente, para calcular el tiempo que tarda la barra en alcanzar $90º\,C$ se resuelve la ecuación $T(t) = 90$: $100 - 80e^{t\,ln\left(\frac{78}{80}\right)} = 90 \Rightarrow 10 = 80e^{t\,ln\left(\frac{78}{80}\right)} \Rightarrow \frac{1}{8} = e^{t\,ln\left(\frac{78}{80}\right)}$

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

$$t = \frac{ln\left(\frac{1}{8}\right)}{ln\left(\frac{78}{80}\right)} \simeq 82.1seg.$$

De igual modo para calcular el tiempo que tarda en alcanzar $98º\,C$ se resuelve la ecuación $T(t) = 98$.

Otro tipo de problema que permite entrenar a los estudiantes en la modelación es el caso de las vibraciones armónicas simples no amortiguadas, que, aunque también está asociado a leyes físicas son más conocidas por los estudiantes, como es el caso siguiente: se asume una superficie suficientemente lisa como para despreciar la fuerza de rozamiento. Ver figura 3.

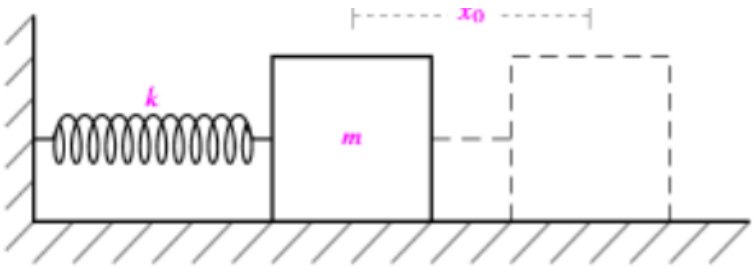


Figura 3.

Problema ejemplo: Vibraciones armónicas simples no amortiguadas.

La única fuerza presente en el sistema es la del muelle y (k) es una constante positiva que depende de la rigidez del muelle: $Fm = -kx(t)$.

La segunda ley de Newton (que se supone conocida por el estudiante) establece que la fuerza total que actúa sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por su aceleración, esto es: $mx''(t) = F_m$. Desde donde el estudiante puede arribar al modelo para las vibraciones del objeto considerando incluso las condiciones iniciales: $x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, x(0) = x_o, x'(0) = 0$ asumiendo que el movimiento parte del reposo, por lo que la velocidad inicial es cero. (Zill & Cullen, 2008). De esta forma se puede guiar al estudiante a construir el modelo matemático de un problema físico.

Este tipo de problema resulta de gran utilidad para ilustrar las diferentes soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden; agregando en el sistema anterior un sistema mecánico (amortiguador) que tiene el efecto de reducir la velocidad cuando el sistema se encuentra vibrando, dado que los aspectos físicos pueden ser comprendidos por los estudiantes en este nivel.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

En este caso el amortiguador ejerce una fuerza dependiendo de la velocidad de la masa. Para simplificar el ejemplo se supone que esta fuerza en magnitud es proporcional a la rapidez, entonces la fuerza que ejerce el amortiguador es: $F_c = -c \cdot x'(t)$ con $c > 0$; donde es evidente que el signo negativo indica que la fuerza de amortiguación va en sentido contrario al movimiento del cuerpo. Por lo que la fuerza total ejercida por la masa es: $F_m + F_c$ o sea: $mx''(r) + cx'(t) + kx(t) = 0$, cuya ecuación característica es: $mr^2 + cr + k = 0$ que tiene las soluciones: $r_1 = \frac{-c+\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$ y $r_2 = \frac{-c-\sqrt{c^2-4mk}}{2m}$ done el signo del radicando $c^2 - 4mk$ determina el tipo de movimiento del sistema:

1. Movimiento sobre amortiguado $c^2 - 4mk > 0$. En este caso: $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ como las dos funciones exponenciales son decrecientes el sistema tiende rápidamente a su posición de equilibrio.
2. Movimiento críticamente amortiguado $c = \sqrt{4mk}$

$$x(t) = \left(c_1 + c_2 t\right) e^{r_1 t} = \left(c_1 + c_2 t\right) e^{\frac{c}{2m} t}$$

La función posición contiene un término exponencial decreciente multiplicado por una función lineal en el tiempo. Se espera que la posición decrezca hacia la posición de equilibrio sin vibrar, la manera en la que lo haga dependerá de las condiciones iniciales.

3. Movimiento sub amortiguado $c^2 - 4mk > 0$. En este caso:

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m} t}\left[c_1 \cos\left[\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t\right] + c_2 sen\left[\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t\right]\right]$$

El sistema oscilará alrededor de la posición de equilibrio. Como el factor exponencial es decreciente, la amplitud de la vibración debe ser cada vez más pequeña.

Como se aprecia, el análisis de los diferentes casos que determinan las raíces de la ecuación característica, a través del fenómeno físico estudiado, permitirá a los estudiantes una comprensión fundamentada de las soluciones de este tipo de ecuaciones diferenciales, y aunque no se puede decir que hayan modelado el problema, la vinculación al fenómeno físico propicia conocimientos necesarios para la modelación, además problemas como este permiten al docente apreciar el nivel de comprensión del fenómeno por parte del estudiante, (Fernández et al., 2023).

Otra situación con aplicaciones físicas inmediatas son los problemas de caída libre, como es el caso en el siguiente problema:

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

- Un cuerpo de masa $75\ Kg$ se suelta a una altura de 30.5 pies. Asumiendo que no hay resistencia del aire hallar:

  a) Una expresión para la velocidad del cuerpo en un momento (t).
  b) Una expresión para la posición del cuerpo en un momento (t).
  c) El tiempo requerido por el cuerpo para llegar al suelo.

Aunque en este caso el planteamiento inicial resulta inmediato, a partir de la segunda Ley de Newton $F = m\frac{dv}{dt}$, ajustar la misma al problema planteado implica un entrenamiento inicial para interpretar y aplicar los modelos.

En este caso la referida ley se expresa como: $m\frac{dv}{dt} = mg$, y de acuerdo a la información del problema se tiene que $v(0) = 0$, luego $\frac{dv}{dt} = 9.81$ o bien $dv = 9.81dt$, e integrando: $v(t) = 9.81t + c$, donde la condición inicial permite evaluar c, esto es $v(0) = 0 + c$, esto es $c = 0$, por último, $v(t) = 9.81t$, que es la expresión para la velocidad del cuerpo en un momento (t).

Ahora teniendo en cuenta que $v(t) = dx/dt$, se tiene: $dx/dt = 9.81t$ o bien: $d(x) = (9.81t)dt$, $x(t) = 9.81\frac{t^2}{2} + c$ como ya se obtuvo $c = 0$ y efectuando $x(t) = 4.905t^2$ que es la expresión para la posición del cuerpo en un momento (t).

Para conocer el tiempo requerido por el cuerpo para llegar al suelo, $x(t) = 30.5$, o sea $40{,}5 = 4.905t^2$ de donde $t = 2.49362$

Otro ejemplo que, aunque utiliza la misma ley, presenta condiciones diferentes que deben considerarse para entrenar a los estudiantes en la construcción del modelo completo. En este caso, se propone el siguiente problema:

- Un cuerpo de 50 kg de masa se lanza desde el borde de un puente en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de 10 m/s, el puente se encuentra 100 metros sobre el nivel del suelo. Si la resistencia del aire está dada por 5v, determine la velocidad del cuerpo cuando llegue al suelo.

Como se planteó la representación en diferentes registros semióticos propicia una mejor comprensión del material que se estudia, por lo que la figura 4 representa e ilustra lo planteado en el enunciado del problema.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

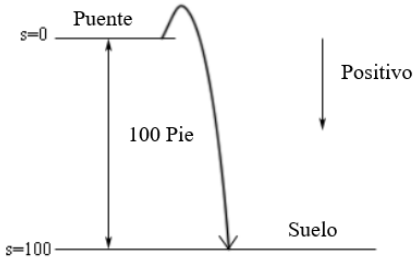
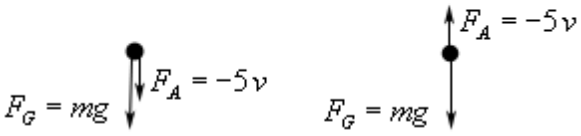


Figura 4.

Problema ejemplo: Velocidad del cuerpo al caer al suelo.

Aquí se presentan dos situaciones; una fase inicial cuando el cuerpo se está elevando y una segunda fase cuando se mueve hacia abajo. Evidentemente hay que tener en cuenta la dos situaciones y las condiciones iniciales en ambos casos. Ver figura 5.



hacia arriba hacia abajo

Figura 5.

Problema ejemplo: Velocidad del cuerpo al caer al suelo (ambas fases).

Aunque las fuerzas que actúan en ambos casos son las mismas, aquí se ha denotado F_G por la fuerza de gravedad y F_A por la fuerza de resistencia. La diferencia se manifiesta al incorporar las condiciones iniciales para cada caso:

Hacia arriba: $mv' = mg - 5v, v(0) = -10$ Hacia abajo: $mv' = mg - 5v,\ v(t_o) = 0; (t_o)$ representa el punto más alto cuando el cuerpo comienza a descender.

En el primer caso: $v' = g - \frac{5}{g}v$, sustituyendo, efectuando y ordenando: $v' + \frac{v}{10} = 9.8$, se tiene una ecuación diferencial lineal de primer orden, con solución: $v(t) = 98 - 108e^{-\frac{t}{10}}$ que representa la velocidad del objeto en cualquier tiempo (t).

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Para determinar la velocidad del cuerpo cuando llegue al suelo se necesita saber cuándo toca el suelo. Para encontrar esto se necesita encontrar la función que representa la posición del cuerpo en un tiempo (t).

Como $\frac{ds(t)}{dt} = v(t) = 98 - 108e^{-\frac{t}{10}}$ resolviendo: $ds(t) = \left(98 - 108e^{-\frac{t}{10}}\right) d(t)$ se obtiene: $s(t) = 98t - 1080e^{-\frac{t}{10}} + c$; ahora usando la condición inicial s(0) = 0 se tiene: c = -1080, por lo que $s(t) = 98t - 1080e^{-\frac{t}{10}} - 1080$ como la altura del puente es 100, evaluando y resolviendo respecto a t se obtiene $t = -3.32203$ y $t = 5.98147$ pero dado que se comienza en $t = 0$, lo negativo es claramente el valor incorrecto. Por lo tanto, la masa golpea el suelo en $t = 5{,}98147$. La velocidad del objeto. al tocar el suelo es entonces: v (5.98147) = 38.61841.

De los ejemplos tratados se puede apreciar que para la resolución de un problema no basta obtener la ecuación matemática que modela el problema, además se requiere interpretar adecuadamente las condiciones específicas que se plantean en el enunciado del problema, lo cual, aunque no es el modelo en sí se debe considerar como un aspecto también fundamental de la modelación.

Orientaciones didácticas para el entrenamiento de los estudiantes en los procesos de modelación.

El análisis realizado en el presente trabajo permite concretar algunas orientaciones para propiciar que los estudiantes ganen conocimientos y recursos para modelar, habilidad fundamental en el trabajo matemático pero difícil de desarrollar en los estudiantes.

El desarrollo de modelos matemáticos para la resolución de problemas presenta dos aspectos que resultan dificultosos para la generalidad de los estudiantes, por una parte, arribar a la ecuación matemática que modela el problema y por otra ajustar la ecuación y sus soluciones a las condiciones particulares del problema planteado. En muchos casos no son trabajos que se puedan hacer de modo independiente, en ocasiones se obtiene la ecuación matemática que modela el problema, se resuelve y por último se analiza cuál de las soluciones satisface las condiciones de problema, pero en otras, las características del contexto se van insertando en la ecuación que modela el problema, hasta lograr el modelo matemático completo del problema.

Concreción de las orientaciones:

1. No se puede pretender que los estudiantes construyan modelos con cierto grado de elaboración, si no tienen el entrenamiento adecuado a tales efectos.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

2. Tener presente que la construcción del modelo depende del dominio conceptual de los estudiantes sobre el tema.
3. Plantear a los estudiantes la ecuación que modela un problema dado, donde solo tienen que sustituir los datos del problema en cuestión, no es un ejercicio de modelación.
4. Una fase inicial puede ser plantear la ecuación que modela el problema pero que los estudiantes tengan que seleccionar de las soluciones de la ecuación, la que es solución del problema.
5. Es recomendable iniciar brindando a los estudiantes un modelo general, pero que los estudiantes tengan que ajustarlo a las condiciones específicas del problema.
6. Se debe iniciar con problemas donde el modelo se obtenga con cierto grado de inmediatez, preferentemente dentro de la matemática.
7. Cuando se plantean problemas fuera de la matemática, el contenido debe estar dentro de los conocimientos que se supone tenga el estudiante.
8. Los estudiantes no desarrollan la habilidad de modelar de manera inmediata, requiere especial atención a la dirección de la actividad del estudiante, por parte del profesor, y dedicación, por parte del estudiante.
9. La participación activa del estudiante es fundamental para que las acciones del docente tengan un impacto significativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

No se pretende que estas orientaciones sean la solución a un problema complejo, como es desarrollar la habilidad de modelar, pero son una ayuda consistente al respecto; que contribuye a mejorar la eficiencia de los docentes (Avilés-Canché y Marbán, 2023).

CONCLUSIONES

El trabajo se ha enfocado a la necesidad de poner la docencia a la altura de desarrollo científico tecnológico del presente siglo, donde el desarrollo de los medios de cómputo, implica la necesidad de desarrollar una docencia enfocada en la formación conceptual, como recurso para la modelación.

Se detallaron las bases teóricas que tienen influencias notables en los temas que se tratan, explicando su uso en los ejemplos que ilustran el desarrollo del trabajo, en el que se muestran diferentes características que se presentan en los problemas de modelación.

El desarrollo desde las bases teóricas y la explicación de diferentes ejemplos permitió arribar a la concreción de un conjunto de orientaciones para contribuir a mejorar el proceso enseñanza

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

aprendizaje de la Matemática, en aspectos tan importantes como la formación conceptual y la habilidad de modelación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abranovich, S. (2015). Mathematical problem posing as a link between Algorithmic thinking and conceptual knowledge. THE TEACHING OF MATHEMATICS. Vol. XVIII, 2, pp. 45–60. tm1821.pdf

Angulo, M. Arteaga, E. & Carmenates, O. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza- aprendizaje de la Matemática. Revista Conrado, 16(74), pp 298-305. 1990-8644-rc-16-74-298.pdf

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Relime* (special issue), 267–299. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2161607

Avilés-Canché, K. I. & Marbán, J. M. (2023). Perfiles de autoeficacia docente y conocimiento especializado para la enseñanza de las matemáticas. Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 26(2), pp. 57-85. https://revistas.um.es/reifop/article/view/559321

Barragán-Moreno, S., Aya-Corredor, O. & Soto-Saray, C. (2024). Modelo conceptual para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas universitarias. https://revistas.isfodosu.edu.do/index.php/recie/article/view/655

Biembengut, M. & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, *16* (2), 105-125. https://www.redalyc.org/pdf/405/40516206.pdf

D'Amore B. and Fandiño Pinilla M.I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. La matematica e la sua didattica (Bologna, Italy). Vol. 21, n. 1, 87-92. Proceedings of: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: Mathematics and its Applications. https://n9.cl/7vjww

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65. https://n9.cl/i0j1jx

Fernández, O., Ivars, P & Linares, S. (2023). El desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes durante los períodos de

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

práctica. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, ISSN 0213-8646 | E-ISSN 2530-379198 (37.2), pp. 127-146. 10.47553/rifop.v98i37.2.99296

Freudenthal, H. (1979). Mathematik als padagogische Aufgabe. *Vol.* I. Y II. Stuttgart: Klett Studienbücher.

González, N, Garcés, W. & Grimaldy, L. (2021). La visualización en la enseñanza de la matemática. Su empleo Mediante el uso del GeoGebra. Revista Didasc@lia: D&E. Publicación del CEPUT- Las Tunas. Cuba. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8164220

Guaypatin, O., Díaz, D., Changuan, S. & Cornejo, P. (2024). La importancia de la matemática para el desarrollo del pensamiento. Revista Científica de Innovación Educativa y Sociedad Actual "ALCON" Vol. 4, Núm. 2. (Edición Especial). pp 31-40. ISSN: 2960-8473. https://doi.org/10.62305/alcon.v4i2.97

Guner, N. (2020). Difficulties Encountered by High School Students in Mathematics. International Journal of Educational Methodology. Volume 6, Issue 4, 703 - 713. https://eric.ed.gov/?id=EJ1278427

Hoth, J., Larrain, M., & Kaiser, G. (2022). *Identifying and dealing with student errors in the mathematics classroom: Cognitive and motivational requirements.* Frontiers in Psychology, 13, 1057730. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1057730.

Hughes, E & Fries, K. (2015). The Language of Mathematics: The Importance of Teaching and Learning Mathematical Vocabulary. Reading & Writing Quarterly, 31:3, 235-252, ISSN: 2469-9632. https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10573569.2015.1030995

Karpov, Y. (2013). A Way to Implement the Neo-Vygotskian Theoretical Learning Approach. International Journal of Pedagogical Innovations. No. 1, 25-35. a6viw451m2d47p.pdf

Kutzler, B. (1999). *The Algebraic Calculador as a Pedagogical tool for Teaching Mathematics.* In: Laughbaum, E.D, (ed.): Hand-Held Tecnology in Mathematics and Science Education: A Collection of Paper, Teachers Teaching with Technology Short Course Program @ the Ohio State University. https://eric.ed.gov/?id=ED444858

Mkhatshwa, T. P. (2023). Calculus instructors' perspectives on effective instructional approaches in the teaching of related rates problems. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 19(11), em2346. https://doi.org/10.29333/ejmste/13658

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Oktac, A. Trogueros, M. & Romo A. (2019). APOS Theory: connecting research and teaching. For the learning of Mathematics 39, FLM Publishing Association, New Westminster, BC Canada. https://eric.ed.gov/?id=EJ1211397

Postelnicu, V., & Tintera, G. (2024). A problem-solving approach aimed at helping Calculus I students solve related rates problems. *PRIMUS*, *35*(7), 1–20. https://doi.org/10.1080/10511970.2024.2414453

Presmeg, N. (2006). Semiotics and the "connections" standard: significance of semiotics for teachers of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 163–182. https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-006-3365-z

Quintana, D., Mejía, L. & Gallo, C. (2022). Influencia significativa del uso de registros semióticos aplicando una propuesta didáctica. Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v 6i 23.358

Revelo, S. & Yánez, N. (2023). Material concreto y su importancia en el fortalecimiento de la matemática: una revisión documental. MENTOR Revista de Investigación Educativa y Deportiva ; 2(4), 69-87. S.A. Versión digital. ISBN 068 880 053 8. https://revistamentor.ec/index.php/mentor/article/view/5304

Sidelil, A. & Nellie, N. (2020). Assessment of Students' Conceptual Knowledge in Limit of Functions. International electronic journal of mathematics education e-ISSN: 1306-3030. Vol. 15, No. 2, em0574 https://doi.org/10.29333/iejme/6294

Spiegel M. (sf). Ecuaciones diferenciales, aplicadas. Prentice-Hall Hispanoamericana. https://es.1lib.sk/book/672655/0d7324/ecuaciones-diferenciales-aplicadas.html

Stephens, A., Stroud, R., Strachota, S., Stylianou, D., Blanton, M., Knuth, E., & Gardiner, A. (2021). *What early algebra knowledge persists 1 year after an elementary grades intervention?* Journal for Research in Mathematics Education, 52(3), 332–348. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.52.3.0332.

Thunibata, R. G., Jaradat, E. K., & Khalifeh, J. M. (2021). *Solution of Non-Linear RLC Circuit Equation Using the Homotopy Perturbation Transform Method*. Jordan Journal of Physics, 14(1), 89–100. https://doi.org/10.47011/14.1.9

Vigotsky, L. (1995). *Problemas del desarrollo de la psique*. *Obras escogidas* (Vol. 3). Madrid: Visor.

Zayas, R., Escalona, M., González, R., & Cedeño, R. (2023). El proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de la matemática superior en las carreras de Ingeniería.

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)

Revista Transdisciplinaria de Estudios Sociales y Tecnológicos, 3(1), pp 37-46. https://n9.cl/5cvaqc

Zill, G. & Cullen, M. (2008). Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales. McGraw-Hill Interamericana. Tercera edición. ISBN-10: 970-10-6514-X

Licencia Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)